Γ. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

1. Εισαγωγή

Εξετάσαμε την κυματική κίνηση στο απλό σύστημα της διάδοσης εγκάρσιων αρμονικών ταλαντώσεων σε χορδή. Με πρότυπο αυτήν την κυματική κίνηση μπορούν να εξεταστούν διάφορα είδη κυμάτων.

Θα ασχοληθούμε με ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπου αυτό που διαδίδεται ως κύμα είναι η ταλάντωση (ή γενικά η μεταβολή) του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται οποτεδήποτε μεταβάλλεται η ταχύτητα ηλεκτρικών φορτίων. Θα δούμε ότι οι εξισώσεις των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων προκύπτουν από τις εξισώσεις Maxwell και μάλιστα ότι τέτοια κύματα διαδίδονται και στο κενό, δηλαδή δεν απαιτείται κάποιο μέσον για τη διάδοσή τους. Θα περιοριστούμε στα **επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα**. Είναι κύματα, δηλαδή ταλαντώσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, που διαδίδονται κατά μια κατεύθυνση (έστω τη $\hat{z}$) και σε κάθε επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης (έστω xy) διατηρούν σταθερές όλες τις παραμέτρους που περιγράφουν την κυματική κίνηση.

2. Οι εξισώσεις του Maxwell

Σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσον του οποίου η διηλεκτρική συμπεριφορά εκφράζεται από την διηλεκτρική του σταθερά ε και η μαγνητική συμπεριφορά από μαγνητική του διαπερατότητα μ, οι εξισώσεις του Maxwell έχουν τη μορφή

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\vec{J} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4}$$

όπου ρ είναι η χωρική πυκνότητα ελεύθερου φορτίου και $\vec{J}$ η πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας.

Από τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ μπορούν να προκύψουν

η ηλεκτρική μετατόπιση: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (5)

και το μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$: $\mu\vec{H} = \vec{B}$ (6)

Σε ένα μέσον με αγωγιμότητα σ ισχύει ο νόμος του Ohm:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{7}$$

Επίσης για τις πυκνότητες ενέργειας ισχύει

Ηλεκτρική: $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ (8)

Μαγνητική: $\frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}\mu H^2$ (9)

3. Εξισώσεις του Maxwell και ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Σε ένα μέσον όπου δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία, ούτε ρεύματα αγωγιμότητας ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ ή $\sigma = 0$) οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν τη μορφή

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \text{ ή } \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ ή } \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (13)$$

Παίρνοντας τον στροβιλισμό της εξ.10 έχουμε:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (14)$$

Από την ταυτότητα $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ (15)

προκύπτει $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$

και λόγω της εξ.12 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$ (16)

οπότε

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (17)$$

ή $$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (18)$$

Η εξ.(18) είναι η κυματική εξίσωση σε τρεις διαστάσεις και περιγράφει τη διάδοση κύματος, που εδώ είναι η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$, στο μέσον με ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (19)$$

Ομοίως μπορεί να προκύψει η εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (20)$$

Στο κενό αντί των ε και μ έχουμε ε_0 και μ_0 οπότε

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (21)$$

όπου $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Ο λόγος $n \equiv \frac{\upsilon_{\kappa\varepsilon\nu o}}{\upsilon_{\upsilon\lambda\iota\kappa o}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ (22)

ονομάζεται **δείκτης διάθλασης** του υλικού (μέσου), όπου ε_r και μ_r είναι οι σχετικές τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς και της μαγνητικής διαπερατότητας αντίστοιχα.

4. Επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Οι εξ, (18) και (20) εκφράζουν για κάθε συνιστώσα των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ μια κυματική εξίσωση σε τρεις διαστάσεις, της μορφής

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \tag{23}$$

Για να απλοποιήσουμε τη μελέτη θα περιοριστούμε σε προβλήματα όπου η μεταβολή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι μόνον συναρτήσεις μιας μεταβλητής θέσης και του χρόνου, έστω $\vec{E}(z,t)$ και $\vec{B}(z,t)$. Στην περίπτωση αυτή οι μερικές παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές x και y είναι μηδενικές, οπότε η εξ. (23) και οι αντίστοιχες για τις συνιστώσες E_y και E_z γίνονται:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{26}$$

Οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν για κάθε συνιστώσα του $\vec{E}$ κύμα που διαδίδεται κατά z με ταχύτητα υ, και αν επιλέξουμε την απλή αρμονική λύση για κάθε συνιστώσα θα έχουμε

$$\vec{E}(z,t) = \hat{x}E_{0x}e^{i(\omega t-kz)} + \hat{y}E_{0y}e^{i(\omega t-kz)} + \hat{z}E_{0z}e^{i(\omega t-kz)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t-kz)} \tag{27}$$

όπου $\vec{E}_0$ είναι το πλάτος και $\frac{\omega}{k} = \upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ (28)

Η εξ. (27) παριστάνει μια αρμονική ταλάντωση του πεδίου $\vec{E}$ με γωνιακή συχνότητα ω που διαδίδεται κατά $+z$ ως κύμα μήκους κύματος λ $(\lambda = \frac{2\pi}{k})$, όπου το πεδίο έχει την ίδια τιμή πάνω στο κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης επίπεδο xy. Τα κύματα αυτά ονομάζονται **επίπεδα κύματα** και τα επίπεδα xy τα οποία είναι **ισοφασικά επίπεδα** ονομάζονται και **μέτωπα κύματος**.

Επειδή $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$ (εξ. 12) και $\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$ προκύπτει και $\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$ το οποίο επιβάλλει $E_{0z}=0$, οπότε

$$\vec{E}(z,t)=\hat{x}E_{0x}e^{i(\omega t-kz)}+\hat{y}E_{0y}e^{i(\omega t-kz)} \tag{29}$$

Από την εξ.(1) προκύπτει

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\times\vec{E}=ik(\hat{x}E_{0y}-\hat{y}E_{0x})e^{i(\omega t-kz)} \quad \text{και} \quad \vec{B}=-\frac{k}{\omega}(\hat{x}E_{0y}-\hat{y}E_{0x})e^{i(\omega t-kz)}+f(x,y,z)$$

η οποία αν περιοριστούμε μόνο σε χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη γίνεται

$$\vec{B}=(-\hat{x}\frac{E_{0y}}{\upsilon}+\hat{y}\frac{E_{0x}}{\upsilon})e^{i(\omega t-kz)}=\hat{x}B_{0x}e^{i(\omega t-kz)}+\hat{y}B_{0y}e^{i(\omega t-kz)} \tag{30}$$

Τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell και δεν έχουν συνιστώσα κατά τον άξονα διάδοσης. Δηλαδή, το επίπεδο ηλεκτρικό κύμα $\vec{E}(z,t)$ λόγω των εξισώσεων Maxwell συνεπάγεται ένα **εγκάρσιο επίπεδο ηλεκτρικό και μαγνητικό κύμα**.

Τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ δεν είναι ανεξάρτητα

$$E_{0x}=\upsilon B_{0y}, \qquad E_{0y}=-\upsilon B_{0x} \tag{31}$$

Επίσης,

$$\vec{E}\cdot\vec{B}=(\hat{x}E_{0x}+\hat{y}E_{0y})\cdot(-\hat{x}\frac{E_{0y}}{\upsilon}+\hat{y}\frac{E_{0x}}{\upsilon})e^{2i(\omega t-kz)}=0 \tag{32}$$

δηλαδή, $\vec{E}\perp\vec{B}$ σε κάθε σημείο.

Θα απλοποιήσουμε περισσότερο την εικόνα των επίπεδων κυμάτων θεωρώντας κύμα στο οποίο η ταλάντωση του $\vec{E}$ γίνεται κατά μήκος του άξονα x (πρόκειται για **γραμμικά πολωμένο κύμα**), δηλαδή, $E_y=0$ οπότε $E_{0y}=0$ και $B_{0x}=0$.
Στην περίπτωση αυτή οι λύσεις είναι

$$\vec{E}=\hat{x}E_0e^{i(\omega t-kz)}, \quad \vec{B}=\hat{y}B_0e^{i(\omega t-kz)} \tag{33}$$

Δηλαδή, $\vec{E}=\hat{x}E_0\cos(\omega t-kz), \qquad \vec{B}=\hat{y}B_0\cos(\omega t-kz)$ (34)

ή $\vec{E}=\hat{x}E_0\sin(\omega t-kz), \qquad \vec{B}=\hat{y}B_0\sin(\omega t-kz)$ (35)

όπου $\frac{E_x}{B_y}=\frac{E_0}{B_0}=\upsilon$ (36)

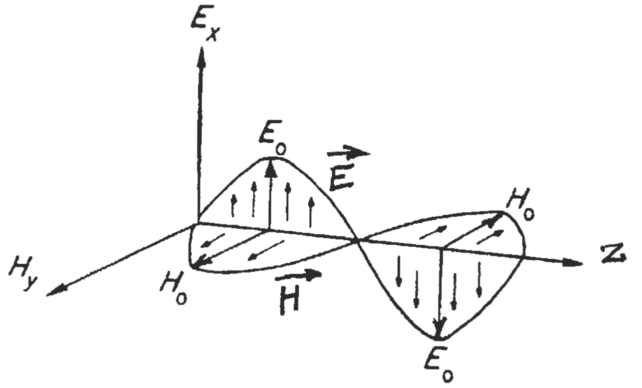
Αν κρατήσουμε την ημιτονική έκφραση, μια άλλη μορφή είναι η

$$E_x = E_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - z) \tag{37}$$

$$B_y = B_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - z) \tag{38}$$

ή ισοδύναμα (εξ. 6)

$$H_y = H_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - z) \tag{39}$$



5. Το διάνυσμα Poynting και η ροή ενέργειας στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Το διάνυσμα *Poynting*

Το διάνυσμα $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (\hat{x} \times \hat{y}) E_0 H_0 \sin^2(\omega t - kz)$ (40)
δείχνει την κατεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. Ονομάζεται διάνυσμα Poynting και έχει διαστάσεις W/m^2.
Παίρνοντας την απόκλιση του $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ έχουμε από σχετική διανυσματική ταυτότητα

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}).$$

Αν $\vec{J} = 0$, τότε $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) - (\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\varepsilon(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) - \mu(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t})$$

ή $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2)$ (41)
Αν ολοκληρώσουμε σε ένα όγκο V που περικλείεται από επιφάνεια S, επειδή ισχύει

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})d\upsilon = \oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{a} \qquad \text{(θεώρημα Gauss)},$$

έχουμε

$$\oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{a} = \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \tfrac{1}{2}\mu H^2)d\upsilon \qquad (42)$$

Δηλαδή, η ολική ροή του διανύσματος Poynting μέσα από μια κλειστή επιφάνεια S (προς τα έξω) είναι ίση με το ρυθμό μείωσης της ολικής ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στον περικλειώμενο όγκο V.

Από τις εξ.(41) και (42) φαίνεται ότι το διάνυσμα Poynting δίνει τη ροή ενέργειας σε ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας.

Πυκνότητα ενέργειας

Από τις εξ. (19) και (35) προκύπτει ότι

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (43)$$

Η ποσότητα $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ έχει διαστάσεις αντίστασης και ονομάζεται **χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση** του μέσου (υλικού) στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Στο κενό $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}7\ \Omega$.

Από την εξ. 43 προκύπτει

$$\frac{E_x^2}{H_y^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \quad \text{και επομένως} \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon E_x^2 = \tfrac{1}{2}\mu H_y^2 \qquad (44)$$

δηλαδή, για ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε ένα μη αγώγιμο μέσον, η πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας είναι ίση με την πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας. Η πυκνότητα της ολικής ενέργειας είναι $\tfrac{1}{2}\varepsilon E_x^2 + \tfrac{1}{2}\mu H_y^2$.

Από τις εξ. (37) και (39) προκύπτει για τις χρονικές μέσες τιμές των E_x^2 και H_y^2

$$\overline{E_x^2} = \tfrac{1}{2}E_0^2\ ,\ \overline{H_y^2} = \tfrac{1}{2}H_0^2 \qquad (45)$$

Οπότε η χρονική μέση τιμή της πυκνότητας της ολικής ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας είναι

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\overline{E_x^2} + \tfrac{1}{2}\mu\overline{H_y^2} = \tfrac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \quad (J/m^3) \qquad (46)$$

Ροή ενέργειας

Σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα η ενέργεια που διέρχεται από τη μονάδα επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται **ένταση του κύματος I**. Η χρονική μέση τιμή της έντασης είναι

$$\overline{I} = (\text{μέση πυκνότητα ενέργειας})(\text{ταχύτητα κύματος}) = \tfrac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \upsilon \tag{47}$$

Αυτό δίνει τη χρονική μέση τιμή του διανύσματος Poynting (ή της έντασης)

$$\overline{S} = \overline{I} = \tfrac{1}{2}\upsilon\varepsilon E_0^2 = \tfrac{1}{2}\upsilon\mu H_0^2 \quad (W/m^2) \tag{48}$$